AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI
TƏHSİL NAZİRLİYİ

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ЭТАП
ПОЛУФИНАЛЬНЫЙ ТУР

11.03.2017

МАТЕМАТИКА
11-ый КЛАСС

1. Положительные числа $a_1, a_2 \cdots a_{2017}$ и $b_1, b_2 \cdots b_{2017}$ удовлетворяют условию
$a_1 + a_2 + a_{2017} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2017} = 1.$

Найдите наименьшее значение суммы $S = \frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_{2017}^2}{a_{2017}+b_{2017}}$.

A) 0
B) 1
C) $\frac{1}{2}$
D) 2
E) $\frac{1}{3}$

2. Найдите сумму цифр трехзначного числа $\overline{abc}$ (a<b<c), если выполняется равенство $\overline{abc} = \left(\overline{ab}\right)^2 - c^2$.

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

3. В последовательности *x, y, z, t, 10, u, v….* каждый член, начиная с третьего равен произведению двух предыдущих членов. Найдите произведение первых 6 членов этой последовательности.

A) 1000
B) 6000
C) 5000
D) 10000
E) 15000

4. Дробь $\frac{100!}{12^{50}}$ сократили, и получили несократимую дробь $\frac{m}{n}$. (m и n натуральные числа) Найдите n.

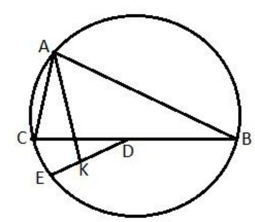
A) 72
B) 144
C) 54
D) 36
E) 96

5. Если в числе 12008 между нулями вставить 2017 количество троек, то получиться число, делящееся на:

A) 23
B) 15
C) 17
D) 19
E) 27

6. Известно, что $|AB| = c, |AC| = b$ и $c > b$, точка D является серединой отрезка BC.
Отрезок AK является биссектрисой угла BAC, E и D симметричны относительно точки K.
Найдите расстояние между точками A и D.

A) $\frac{2bc}{b+c}$ B) $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ C) $\frac{b+c}{2}$ D) $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$
E) $\sqrt{bc}$



7. Известно, что $(a+b+c) \cdot c < 0$. Какое из нижеперечисленных соотношений всегда имеет место?

A) $b^2 > 4ac$
B) $b = 2ac$
C) $b^2 < 4ac$
D) $b = 4ac$
E) $b^2 = 4ac$

8. Пусть f(x)= $x^2 + 12x + 30$. Тогда сумма корней уравнения f(f(f(f(f(x)))))=0 равна:

A) 0
B) -6
C) -12
D) 6
E) 12

9. В прямоугольный треугольник вписан круг. Отношение площади круга к площади треугольника равно $\frac{\pi}{3+2\sqrt{2}}$. Найдите острые углы треугольника.

A) (45°,45°) B) (75°,15°)
C) (30°,60°) D) (35°,55°)
E) (40°,50°)

10. Для какого из нижеследующих многочленов $P(x)$ имеются многочлены с целыми коэфицентами Q(x) и R(x), если $P(x) = Q(x)(x^2+1) + R(x)(x-1)$?

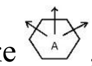
A) $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^9 + 4\mathrm{x}^7 + \mathrm{x}^3 + 3\mathrm{x} + 2$
B) $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^9 + 2\mathrm{x}^6 + \mathrm{x}^4 + 3\mathrm{x}$
C) $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^9 + 2\mathrm{x}^6 + 3\mathrm{x}^5 + 2\mathrm{x}$
D) $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^9 + \mathrm{x}^7 + 2\mathrm{x} + 1$
E) Ни один из вариантов.

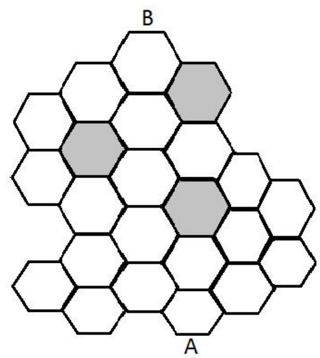
11. Назовем сумму чисел в множестве его «весом». Например, «вес» множества {3,5,7} равен 3+5+7=15-ти. Найдите сумму «весов» всех подмножеств множества {1,3,5, … … ,17,19}.

A)51200 B)97280
C)41472 D)102400
E) 25600

12. Найдите остаток от деления числа $k = 2^{2017} + 3^{2017} + 4^{2017} + \cdots + 2000^{2017} + 2001^{2017}$ на 77.

A) 4
B) 65
C) 76
D) 12
E) 0

13. Игрок находящийся в A, двигаясь только вверх в трех направлениях как показано на рисунке  , хочет добраться до B проходя через шестиугольные комнаты нарисованные на рисунке. Сколькими разными путями можно добраться от A до B, если заштрихованные комнаты закрыты.



A) 72 B) 64 C) 52 D) 60 E) 46

14. Пусть будет дана последовательность $\mathrm{a_n} = \mathrm{n}^2 + 5, (\mathrm{n} = 1,2,3, \dots)$. Для каждого n НОД чисел $\mathrm{a_n}$ и $\mathrm{a_{n+1}}$будет указана через $\mathrm{d_n}$. Найдите наибольшее значение, которое может принять $\mathrm{d_n}$.

A) 15 B) 30 C) 25 D) 27 E) 21

15. Для последовательностидействительных чисел $\mathrm{A} = (\mathrm{a_1}, \mathrm{a_2}, \mathrm{a_3}, \dots, \mathrm{a_n} \dots)$ при условии, что $\mathrm{a_{11}} = 0$ и $\mathrm{a_{14}} = 21$, последовательность A^* определена следующим образом:

$$\mathrm{A}^* = (\mathrm{a_2} - \mathrm{a_1}, \mathrm{a_3} - \mathrm{a_2}, \mathrm{a_4} - \mathrm{a_{3,}} \dots ., \mathrm{a_{n+1}} - \mathrm{a_n}, \dots)$$

Если все элементы последовательности $(\mathrm{A}^*)^*$ равны 1-му, то чему равен $\mathrm{a_1}$?

A) -5 B) -2 C) 0 D) 3 E) 7

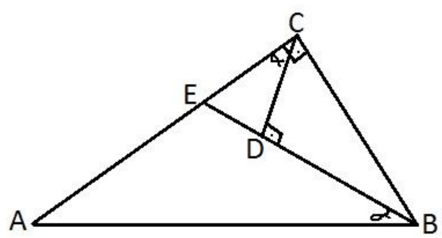
16. Дано множество $X = \{1,2,3,4\}$. Сколько существуют функций не отвечающих условию $f(a) = f(b) = f(c)$ среди функций $f: X \to X$ при условии, что $a, b, c \in X$?

A) 200 B) 202 C) 204 D) 208 E) 212

17. Чему равно tg(α+β), если 3 sinβ = sin (2α+β) и tgα = 5?

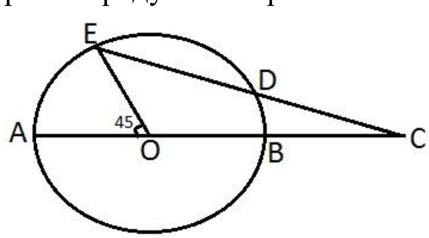
A) -10 B) -5 C) 0 D) 5 E) 10

18. На рисунке изображен прямоугольный треугольник, в котором $\angle ACB = 90^0, \angle BAC = 30^0$ и $\angle ECD = \angle EBA$. Если $CD \perp BE$ и $|AC| = 9$ см, то чему равно $|AE|$?



A) 5 B) $5\sqrt{3}$ C) 6 D) $6\sqrt{2}$ E) 7

19. На рисунке отрезок $[AB]$ является диаметром окружности с центром в точке O. Если $|AO| = |DC|$ и $\angle EAO = 45^0$, то чему равна градусная мера $\angle DCO$?



A) 10
B) 15
C) 20
D) 25
E) 30

20. Чему равно наименьшее значение многочлена $P(x,y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$?

A) 0
B) 4
C) -2
D) -1
E) 3

21. Найдите производную функции, обратной к $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

A) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
B) $\frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$
C) $\sqrt{1+x^2}$
D) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
E) $-\sqrt{1+x^2}$

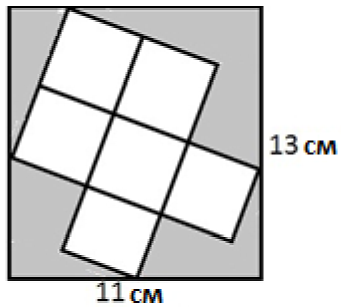
22. Найдите $f(100)$, если для любых действительных чисел x, y верно $f(x+y^2) = f(x) + 2(f(y))^2$ и $f(1) \neq 0$.

A) 100 B) 101 C) 99
D) 50 E) Ни один из вариантов

23. Сколько одиннадцатизначных чисел, состоящих только из цифр 2, 3 и 5 делятся на 18 без остатка при условии, что количество пятерок в данном числе больше двоек?

A) 360 B) 375 C) 390 D) 405 E) 425

24. На рисунке в прямоугольник с измерениями $11x13$было помещено шесть одинаковых квадратов. Найдите площадь заштрихованной части.



A) 62 B) 64 C) 65 D) 68 E) 75

25. Дан равносторонний треугольник ABC. Сторона BC разделена на три равные части точками K и L, а точка M делит сторону AC в отношении 1:2, считая от вершины A. Чему равна сумма углов AKM и ALM ?

A) 15°
B) 45°
C) 60°
D) 90°
E) 30°